確率数理工学4

期待値と特性関数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：確率空間．

この空間上の r.v. X の期待値を定義したい．

F：X の分布関数．

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$（可測）

φ, f が連続ならリーマン積分で良い．

F が絶対連続か離散なら $\varphi(X)$ の期待値は

$$E[\varphi(X)] = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx & (\text{絶対連続}, f\text{は p.d.f.}) \\ \displaystyle\sum_k \varphi(x_k) P(X = x_k) & (\text{離散}) \end{cases}$$

で与えられる．これを

- 任意の分布へ拡張したい
- 連続・離散といった区別を気にしたくない
- $\mathbb{R}^d$ 以外の空間上でも積分を定義したい．

そこで，以下のように積分（ルベーグ積分）を定義する．

（$\varphi(X(\omega))$ も r.v. なので，ある r.v. X の期待値を定義すれば十分）

- $E[X] = \int X(\omega)\, dP(\omega)$ の定義

$\int X(\omega) P(d\omega)$, $\int X dP$, $\int X\, dF$ 等とも書く．

（$dF = \frac{dF}{dx} \cdot dx = f(x) \cdot dx$ と解釈すれば $\int x\, dF$ の記法も納得できるであろう．）

注：今，我々ができることは和（$\sum_{n=1}^{\infty} \cdots$）をとることだけである．

いかにして，この和の極限で積分を定義すべきか？

↳ 次ページ

(1) $A \in \mathcal{F}$ に対し, A の定義関数

$$X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$

$A \in \mathcal{F}$ だから

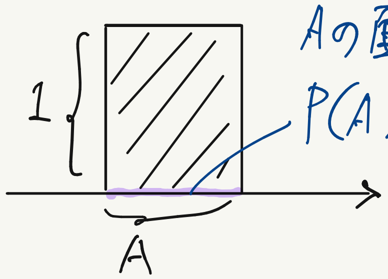
$$\{\omega \mid X(\omega) \leqq x\} = \begin{cases} A & (x \geqq 1) \\ \phi & (x < 1) \end{cases}$$

より X は可測関数

のとき,

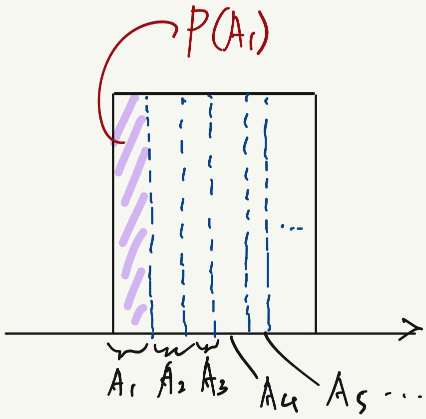
$$E[X] := P(A)$$

とする.



A の面積: $P(A)$ ← $A \in \mathcal{F}$ より $P(A)$ は well-defined

注



$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_k}(\omega)$$

$$\Rightarrow E[X] = P(A)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad (\sigma\text{-加法性})$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{A_k}]$$

矛盾しない.

$\Longrightarrow$ X の表現のしかたによらない

別の分割 $X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_k}$ としても

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbb{1}_{B_k}]$$

(2) X が単関数のとき，つまり　　　　← これもまた可測！？

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \qquad \text{（有限和）}$$

ただし，$a_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $(A_i)_{i=1}^{n}$ は互いに素とするとき，

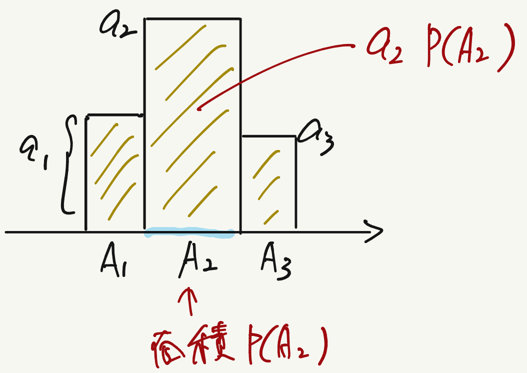
$$E[X] := \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)$$

とする．

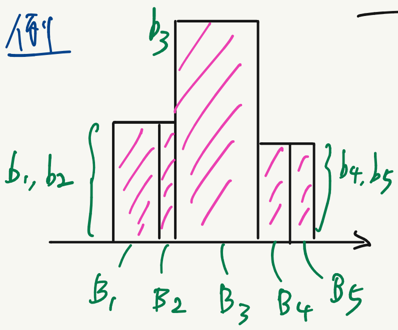
$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ のとき $E[X] = \sum_{j=1}^{m} b_j P(B_j)$

（(1)での注のように，これは単関数の表現のしかたによらない．）

→ 有限加法性を使う．（演習問題）



例



$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \sum_{j=1}^{5} b_j \mathbb{1}_{B_j}(\omega)$$

$E[X] = \sum_{j=1}^{5} b_j P(B_j)$ である．

(3) X が非負の確率変数の時

単関数の単調列 $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \cdots \leq X(\omega)$ が存在して、

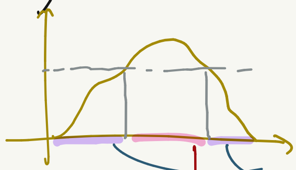
$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ ($X_n \nearrow X$ と書く)

とできることが知られている。

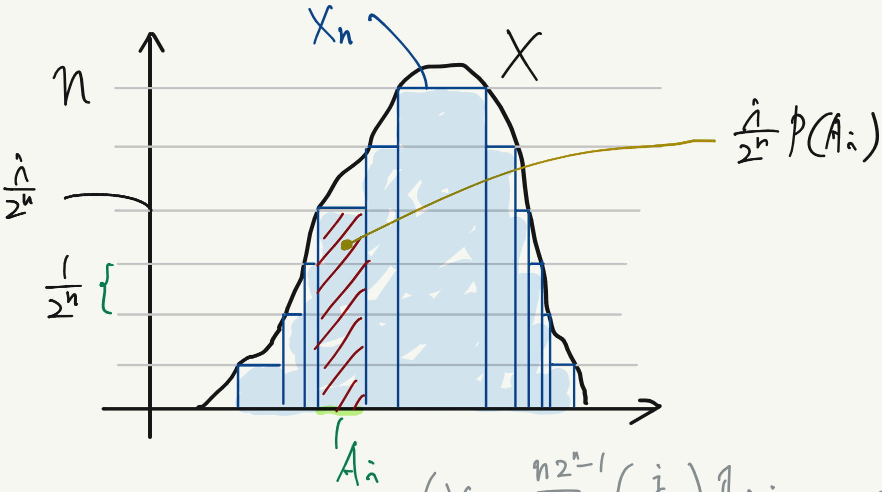
※ X の可測性より この X_n は可測 ($\{\omega \mid X(\omega) \leq \frac{i}{2^n}\}$ は可測)

たとえば、

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{2^n} & \left(\frac{i}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{i+1}{2^n},\ i=0,\cdots,n2^n-1\right) \\ n & (X(\omega) \geq n) \end{cases}$$



とすれば良い。



$$\left(X_n = \sum_{j=0}^{n2^n-1} \left(\frac{j}{2^n}\right) \underbrace{\mathbb{1}_{\{\frac{i}{2^n} \leq X < \frac{i+1}{2^n}\}}}_{\text{可測}} + n \underbrace{\mathbb{1}_{\{X \geq n\}}}_{\text{可測}}\right)$$

このような $(X_n)_n$ を用いて

$$\boxed{E[X] := \lim_{n\to\infty} E[X_n]}$$

と定義する。これは単関数の取り方によらないことが知られている。

(4) 非負とは限らない X の時

$X_+ = X \cdot \mathbb{1}\{X \geq 0\}$, $X_- = |X| \, \mathbb{1}\{X < 0\}$ とすれば良い.

$$X = X_+ - X_-$$ （X_+, X_- はともに非負）

と分解して.

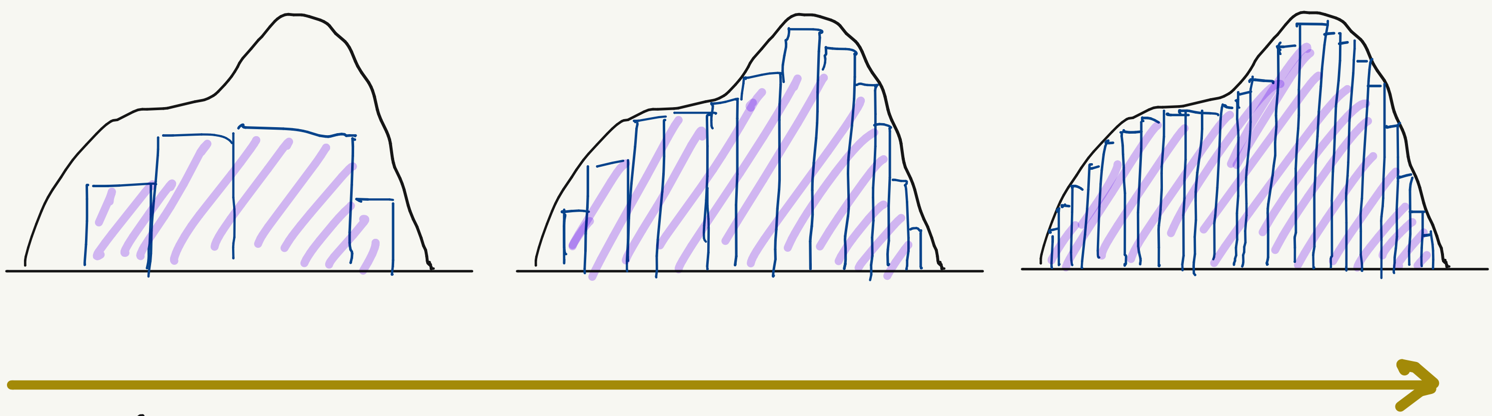
$$\boxed{E[X] = E[X_+] - E[X_-]}$$

とする.

$E[X_+], E[X_-] < \infty$ のとき, 可積分という（$X \in L^1(P)$ とも書く.）

※: 積分の定義において $\Omega = \mathbb{R}^d$ という仮定は使ってない. 任意の空間で定義できている.

イメージ



単関数で領域を下から埋めてゆく

X が単関数の列の極限で書けるかという所で X の可測性を用いている.

積分が well-defined であることの証明

つまり、単関数の列 X_n, Y_n がともに $X_n \nearrow X$, $Y_n \nearrow X$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \lim_{n\to\infty} E[Y_n]$$

を示す。さもなくば、$E[X]$ が単関数の取り方に依存し、well-defined でなくなる。

Lem

単関数 X, Y に対し、　　　　（演習問題）

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y] \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Lem

単関数列 X_n, 単関数 X に対し、$X_n \nearrow X$ なら

$$\lim_n E[X_n] = E[X]$$

証明

$E[X] - E[X_n] = E[X - X_n]$ より、

$\lim_{n\to\infty} E[X - X_n] = 0$ を示せば良い。

言いかえれば、非負の単関数列 X_n が、$X_n \searrow 0$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = 0 \qquad (X_n \leftarrow X - X_n \text{ と代入})$$

を示せば良い。

今 $X_1(\omega) \geqq X_2(\omega) \geqq \cdots \geqq 0$ かつ、X_1 が単関数なので、

$$K = \sup_{\omega\in\Omega} X_1(\omega)$$

とすれば $K < \infty$ かつ $\forall \omega \in \Omega, \forall n$ で $0 \leqq X_n(\omega) \leqq K$ である。

特に $0 \leqq X_n = X_n \mathbb{1}\{X_n > \varepsilon\} + X_n \mathbb{1}\{X_n \leqq \varepsilon\}$ 　（$\varepsilon > 0$ は任意）

$$\leqq \underset{\uparrow\ |X_n| \leqq K \text{ より}}{K} \mathbb{1}\{X_n > \varepsilon\} + \varepsilon \mathbb{1}\{X_n \leqq \varepsilon\} \quad (\leftarrow \text{これも単関数})$$

両辺 期待値をとって、

$$\underset{\uparrow\ \text{単調性}}{0 \leqq E[X_n]} \leqq K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon \underbrace{P(X_n \leqq \varepsilon)}_{\leqq 1}$$

$$\leqq K P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon$$

ここで $X_n \searrow 0$ より $A_n = \{X_n > \varepsilon\}$ とおくと、

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ かつ $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$ である。 ← チェックせよ

よって確率の単調性より、 ← ここで P の σ-加法性が使われている。

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$$

なので、

$$\limsup_{n\to\infty} E[X_n] \leqq \varepsilon$$

(∵ 前ページで $E[X_n] \leqq k \underbrace{P(X_n > \varepsilon)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \varepsilon$ を示している)

$\varepsilon > 0$ は任意なので、

$$\lim E[X_n] = 0$$

である。 //

$\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$ の証明

- $\lim E[X_n] \leqq \lim E[Y_n]$ が示せれば、X_n と Y_n の対称性より $\lim E[X_n] = \lim E[Y_n]$ を得る。

今 n を固定して、

$$Z_{n,m}(\omega) = \min\left(X_n(\omega), Y_m(\omega)\right)$$

とおく。これは単関数である。

当然 $Z_{n,m} \leqq Y_m \quad (a.s.)$ である。

また、$\lim_m Y_m(\omega) = X(\omega) \geqq X_n(\omega) \quad (\forall \omega)$ より

$$Z_{n,m} \nearrow X_n \quad (m\to\infty)$$

でもある。よって先の Lemma より、

$$E[X_n] = \lim_{m\to\infty} E[Z_{n,m}] \leqq \lim_{m\to\infty} E[Y_m].$$

n は任意なので、$\lim_{n\to\infty} E[X_n] \leqq \lim_{m\to\infty} E[Y_m]$. //

• リーマン積分との関係

Thm

$-\infty<a<b<\infty$ を用いた有界区間 $[a,b]$ を考える。
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ がリーマン積分可能なら、ルベーグ積分可能である。 //

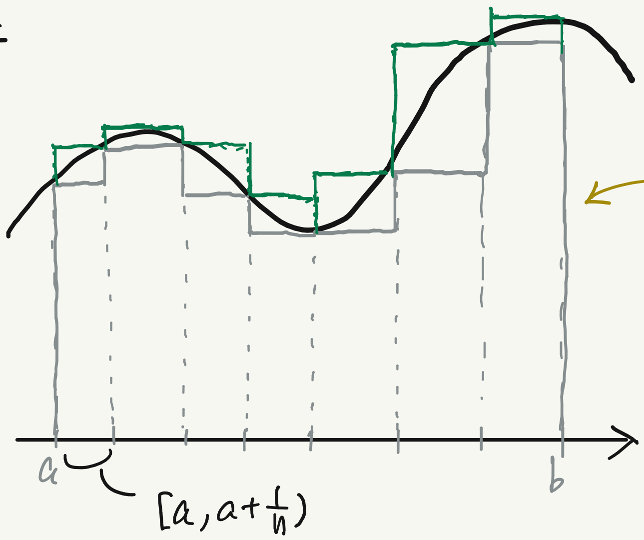
Thm

f が $[a,b]$ 上リーマン可積分 $\iff$ f はほとんど至る所で連続 //
(ルベーグ測度の意味で測度0の集合をのぞいて)

(注：これは σ-加法族として Borel 集合族ではなく、ルベーグ可測集合族を考えている。f が $\mathcal{B}(\mathbb{R})/\mathcal{B}(\mathbb{R})$-可測なら、Borel 集合族で o.k.)

• 2つ目の定理より、リーマン積分の意味での可積分性の時点で、ルベーグ測度の概念が自然に出て来る。「不連続点が可算個」では不十分。

直感



これが、ルベーグ積分における単関数近似になっている。

• リーマン積分は $[a,b]$ の有限分割から始めるので、$A=\mathbb{Q}\cap[a,b]$ に対する $f(x)=\mathbb{1}_A(x)$ のような関数は積分できない。

- Xの<u>平均値</u>: $\varphi(x)=x$, $\mu \overset{def}{=} E[X]$
- Xの<u>k次モーメント</u>: $\varphi(x)=x^k$, $\mu_k \overset{def}{=} E[X^k]$

ニューケー

- <u>平均値まわりのk次モーメント</u>: $\varphi(x)=(x-\mu)^k$, $\nu_k \overset{def}{=} E[(X-\mu)^k]$
- <u>分散</u>: $\varphi(x)=(x-\mu)^2$, $Var[X] \overset{def}{=} E[(X-\mu)^2]$

$$= E[X^2-2X\mu+\mu^2]$$
$$= E[X^2]-E[X]^2$$
$$(=\nu_2)$$

<u>Cor</u> (期待値の性質)

(1) $Y=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$ に対し.

$$E[Y]=\sum_{k=1}^{n} a_k E[X_k] \quad \text{(線形性)}$$

(2) $X \leqq Y$ (a.s.) なら

a.s. は almost surely の意
$P(X \leqq Y)=1$ ということ.

$$E[X] \leqq E[Y] \quad \text{(単調性)}$$

(3) - $X \geqq 0$ (a.s.) のとき.

$$E[X]=\int_{[0,\infty)}(1-F(x))\,dx$$
$$=\int_{[0,\infty)}P(X>x)\,dx$$

- $X \geqq 0$ (a.s.), $\alpha>0$ に対し.

$$E[X^\alpha]=\alpha\int_{[0,\infty)}x^{\alpha-1}P(X>x)\,dx$$

$(\because)$
$$E[X]=\int_{[0,\infty)}x\,dF(x)$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \mathbb{1}[t<x]\,dt\,dF(x)$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty \mathbb{1}[t<x]\,dF(x)\,dt \quad (\because \text{Fubini})$$
$$=\int_0^\infty P(t<X)\,dt$$

非負被積分関数なら順序交換可能

(2つめも同様) //

(4) (単調収束定理)　　(証明は後のページと演習問題で)

$X_n \nearrow X$ かつ $0 \le X_n \le X$ (a.s.) なら、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

(∞も許す。)

← X_n, X は単関数とは限らない一般の確率変数

(5) (Fatouの補題)

$X_n \ge 0$ (a.s.) なら、

$$E\left[\liminf_{n\to\infty} X_n\right] \le \liminf_{n\to\infty} E[X_n]$$

(∞も許す)

(6) (優収束定理)

$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ $(\forall \omega \in \Omega)$ でかつ

ある可積分な Z に対して $|X_n| \le Z$ (a.s.) が成り立つ時、

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

//

↓これがないとうまくいかない例

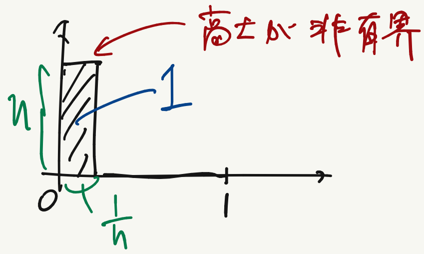
※優収束定理の反例

$\Omega = (0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1])$, P: 一様分布

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & (0 < \omega \le \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad X_n(\omega) \to X(\omega) = 0 \ (\forall \omega \in \Omega)$$

しかし $E[X_n] = 1$, $E[X] = 0$ で $\lim E[X_n] \ne E[X]$.

これは、ある Z で $|X_n| \le Z$ とできないからである。



//

(7) X, Y が独立 $(X \perp\!\!\!\perp Y)$ $\Rightarrow$ $E[XY] = E[X]E[Y]$

(X, Y が単関数ならすぐ確かめられる)

Lem (分散の性質)

(1) X: r.v. に対し, $Y = aX + b$ とおくと,

$$\mathrm{Var}[Y] = a^2 \mathrm{Var}[X]$$

(2) X_1, X_2: r.v., $\mu_1 = E[X_1]$, $\mu_2 = E[X_2]$ なら

$$\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$$

(3) 互いに無相関な $X_1, \dots, X_n$ に対し

$$\mathrm{Var}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + \cdots + \mathrm{Var}[X_n] \quad //$$

(2)のみ示す: $\mathrm{Var}[X_1 + X_2] = E[(X_1 + X_2 - (\mu_1 + \mu_2))^2]$

$$= E[(X_1 - \mu_1)^2] + E[(X_2 - \mu_2)^2] + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)] \quad //$$

- $E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$: 共分散 (Covariance)
  $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ と書く.
- $R(X_1, X_2) \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X_1]\mathrm{Var}[X_2]}}$: 相関係数 (Correlation) $(-1 \leqq R(X_1, X_2) \leqq 1)$ である

$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ (独立) $\Rightarrow$ $E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2]$ が成り立つ.
特に,
$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$ (逆は成り立たない)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}[X_1] & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) \\ \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \mathrm{Var}[X_2] \end{pmatrix}$$: 「分散共分散行列」

※ 無相関: $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$

Ex. (二項分布の期待値と分散)

p.m.f. $f(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \cancel{x} \frac{\overset{= n\cdot(n-1)!}{n!}}{\underset{(x-1)!}{\cancel{x!}}(n-x)!} \theta \cdot \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x}$$

$$= n\theta \sum_{x=1}^{n} \binom{n-1}{x-1} \theta^{x-1} (1-\theta)^{n-x}$$

$$= n\theta \underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{n-x-1}}_{=1} = n\theta$$

$Var[X] = n\theta(1-\theta)$ ← チェックせよ.

一方. $X_i = \begin{cases} 1 & (i\text{回目のコインが表}) \\ 0 & (i\text{回目のコインが裏}) \end{cases}$

(i.i.d.) independent and identically distributed

$\left(\begin{array}{l} P(X_i=1)=\theta \\ P(X_i=0)=1-\theta \end{array} \right)$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とおけば.

Xは2項分布に従う

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \theta = n\theta$$

$$Var[X] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \theta\cdot(1-\theta)^2 + (1-\theta)\cdot\theta^2$$ ← X_iらは独立

$$= \sum_{i=1}^{n} \theta(1-\theta) = n\theta(1-\theta)$$

⟹ 上の計算と一致

単調収束定理の証明（参考）

積分の定義より

各 X_n ごとに単関数列 $Y_m^{(n)}$ が存在して、

$$E[X_n] = \lim_{n\to\infty} E[Y_m^{(n)}], \quad Y_m^{(n)} \nearrow_{m\to\infty} X_n$$

である。このとき、

$$Z_m(\omega) := \max_{n\le m} Y_m^{(n)}(\omega)$$

とすると、Z_m は単関数でかつ $Z_1 \le Z_2 \le Z_3 \le \cdots$ である。

この $(Z_m)_m$ が X に漸近する単関数列であることを示す。

今、$n \le m$ において、

$Y_m^{(n)} \le X_n$ より　　X_n は単調列

$$Y_m^{(n)} \le \max_{n\le m} Y_m^{(n)} = Z_m \le \max_{n\le m} X_n \le X_m$$

つまり、

$$Y_m^{(n)} \le Z_m \le X_m \quad \cdots\cdots ①$$

である。両辺 m について lim とって、

仮定

$$X_n = \lim_{m\to\infty} Y_m^{(n)} \le \lim_m Z_n \le \lim_m X_m = X$$

であり、左辺の n の極限をとると、

E[X] の定義!

$$X = \lim_n X_n \le \lim Z_m \le X$$

となり、$Z_m \nearrow X$ が示せた。つまり $E[X] = \lim_{m\to\infty} E[Z_m]$ である。

あとは $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \lim_{m\to\infty} E[Z_m]\ (= E[X])$ が示せれば十分。

①より、

$$\begin{aligned} E[X_n] &= \lim_m E[Y_m^{(n)}] \\ &\le \lim_m E[Z_m] \quad (\because ①) \\ &\le \lim_m E[X_m] \end{aligned}$$

よって、$E[X_n] \le \lim_m E[Z_m]\ (=E[X]) \le \lim_n E[X_n]$

左辺の lim をとれば、$\lim_n E[X_n] \le E[X] \le \lim E[X_n]$

つまり、$\lim E[X_n] = E[X]$　//

演習問題

(1) $X=\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ (ともに単関数：$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $A_i, B_j \in \mathcal{F}$, $(A_i), (B_j)$ らはそれぞれ互いに素)

のとき，$C_{ij}=A_i \cap B_j$ として，

XをC_{ij}を用いて単関数表示せよ．

また，$E[X]=\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j P(B_j)$ を示せ．

(2) $X=\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$, $Y=\sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{B_j}$ (ともに単関数)

追記 ($\bigcup_i A_i = \bigcup_j B_j = \Omega$ とする)

のとき．

$X+Y$ を $C_{ij}=A_i \cap B_j$ を用いて単関数として表せ．

この表示を用いて，

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$

を示せ．

(3) 単調収束定理を用いてFatouの補題を示せ．

ヒント：$\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} X_m(\omega)\right)$ であることから，

$Y_n(\omega)=\inf_{m\geq n} X_m(\omega)$ として，$(Y_n)_n$ に単調収束定理を適用せよ．

(4) (Fatouの補題別バージョン)

$|X_n| \leqq Z$ が可積分な Z に対して成り立つとき，

$$E[\liminf_n X_n] \leqq \liminf_n E[X_n]$$

$$E[\limsup X_n] \geqq \limsup E[X_n]$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：X_n+Z にFatouを適用．

$-(X_n-Z)$ にFatouを適用．

④ (4)より、優収束定理が示せる。

優収束定理の証明

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[\liminf X_n] && (\because X = \lim_n X_n \text{ より}) \\
&\leq \liminf E[X_n] && (\because (4),\ \text{Fatou の補題}) \\
&\leq \limsup E[X_n] \\
&\leq E[\limsup X_n] && (\because (4)) \\
&= E[X] && (\because X = \lim X_n \text{ より})
\end{aligned}
$$

よって、 $\lim E[X_n] = E[X]$ //

(5) $X_n \geq 0$ (a.s.) のとき、

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n]$$

を示せ。(ヒント: 単調収束定理)

(6) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n=1,2,\cdots)$, $(A_n)_n$ は互いに素、で、X: 可積分 のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[X \mathbb{1}_{A_n}] = E[X \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}]$$ ← 和と積分の交換 / 積分のσ-加法性

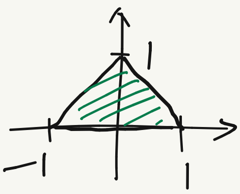
を示せ。(ヒント: 優収束定理)

(7) 標準正規分布の密度関数 f が $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ をみたすことを示せ。

(8) $X \sim$ 標準正規分布 のとき、

$$Var[X] = 1$$

を示せ。



(9) (X_1, X_2) は $(-1,0), (1,0), (0,1)$ を頂点とする三角形上の一様分布に従っている。このとき $E[X_1+X_2]$ を求めよ。

(10) 連続分布 F に対し $E[F(X)] = \int_{\mathbb{R}} F(x)\,dF(x) = \frac{1}{2}$ を示せ。